

ГЕОФИЗИКА, ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКОВ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

УДК 550.83

Решение линейной обратной задачи с использованием компьютерной технологии «GrAnM»

З.З. Арсанукаев, Е.Г. Рудаковская

Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева,
125047, Москва, Миусская площадь, д.9

E-mail: zaindy@mail.ru

(Статья поступила в редакцию 14 мая 2018 г.)

Приведены результаты исследований решения линейной обратной задачи для двух слоистых структур с использованием компьютерной технологии «GrAnM». Раскрыты некоторые аспекты математического характера процесса разработки технологии. Показаны результаты расчетов при определении контуров структур и их плотностей.

Ключевые слова: *гравиметрия, аналитическое продолжение, дискретное уравнение Лапласа, системы линейных алгебраических уравнений.*

DOI: 10.17072/pstu.geol.17.3.268

Важнейшей проблемой в геофизике, в частности в гравиметрии, является решение обратной задачи: по наблюдаемому гравитационному полю на поверхности Земли найти распределение масс в толще Земли, ответственное за наблюдаемое поле. Существуют два подхода к решению обратной задачи. Первый – это метод подбора.

Метод подбора заключается в многократном решении прямой задачи для некоторого пробного множества распределений масс, пока не найдется элемент множества, расчетное поле которого будет наиболее близко по какому-либо критерию к наблюдаемому полю. Метод подбора довольно трудоемкий, поскольку требует решения большого объема прямых задач.

Второй подход заключается в прямом (аналитическом) продолжении заданных на поверхности Земли значений поля в нижнее полупространство и основывается на том, что в результате аналитического продолжения однозначно устанавливаются некоторые неправильности расчетного поля. В этих неправильностях (особых точках) значения гравитационного поля ме-

няются скачкообразно или обращаются в бесконечность. Найденные особые точки одновременно представляют геометрические особенности контуров поперечных сечений поверхностей возмущающих тел, которые могут быть выражены в виде резких изломов, разрывов и других искажений. Таким образом, по поведению расчетного аномального поля, полученного в результате аналитического продолжения измеренных значений поля на поверхности Земли, косвенно определяется и поверхность возмущающего тела. Что касается избыточной плотности тела, то она устанавливается по гравитационной аномалии.

В ранних работах в рамках второго подхода (Андреев, Клушин, 1965) задача аналитического продолжения решалась с использованием сеточного метода и некоторых математических теорем. Например, в двумерном случае использовалась теорема о том, что значение гармонической функции в центре окружности равно среднему арифметическому значений функции на самой окружности. Тогда, с использованием этой теоремы, по измеренным на поверхности Земли ($z=0$) и на

уровне (профиле) выше поверхности на шаг сетки ($z=h$) значениям гравитационного поля можно найти значения поля на уровне (профиле), расположенном на глубине в один шаг сетки в нижнем полупространстве. Найденные значения используются для вычисления поля на уровне, находящемся на глубине уже в два шага сетки в нижнем полупространстве и т.д. Этот последовательный пересчет сверху вниз от уровня к уровню и от узла сетки к узлу на данном уровне приводил к быстрому накоплению погрешностей, неизбежно сопровождающих процесс вычислений (это погрешности, связанные с ошибками измерений, погрешности при округлении и т.п.). Как отмечают сами авторы (Андреев, Клушин, 1965), поле удавалось продолжить в нижнее полупространство всего на 1-3 шага сетки.

Эта ситуация начала меняться в результате появления в начале этого века высокопроизводительной вычислительной техники. Теперь задачу аналитического продолжения наблюдаемых значений поля в нижнее полупространство можно свести к задаче составления и решения систем линейных алгебраических уравнений больших порядков. Использование современных вычислительных систем позволяет решать такие системы за приемлемое время. Редуцирование задачи аналитического продолжения к задаче составления СЛАУ осуществляется путем замены непрерывного пространства сеточным пространством и применения дискретного уравнения Лапласа (Самарский, 1971). Поскольку в этом случае значения поля вычисляются сразу во всех узлах заданного сеточного слоя в нижнем полупространстве и нет последовательного пересчета, то погрешности, о которых речь шла выше, перераспределяются в процессе решения СЛАУ между всеми значениями поля и тем самым нивелируются.

Вместе с тем при реализации второго подхода к решению обратной задачи, основанного на аналитическом продолжении заданных на поверхности Земли значений гравитационного поля с использованием уравнения Лапласа, возникают

определенные трудности математического характера. Первая проблема возникает при постановке задачи аналитического продолжения наблюдаемых значений поля в заданный сеточный слой в нижнем полупространстве. С математической точки зрения решение задачи аналитического продолжения означает решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике в предположении, что известны краевые условия по контуру прямоугольника (в условиях двумерной задачи). В гравиметрии заданные, т.е. наблюдаемые на поверхности Земли, значения поля расположены только на части контура прямоугольника (заданного сеточного слоя) – стороне прямоугольника, противоположной его основанию. Очень редко заданные значения поля известны по боковым сторонам прямоугольника (только в случае, если гравиметрическая съемка проводилась в шурфах или подземных выработках). Что касается значений поля, расположенных на основании прямоугольника, то их как раз и необходимо найти в результате аналитического продолжения вниз.

Таким образом, задача аналитического продолжения наблюдаемых на поверхности Земли значений гравитационного поля в нижний заданный сеточный слой является некорректно поставленной. Некорректность постановки задачи приводит к неустойчивому решению СЛАУ, возникающей в результате редуцирования непрерывной задачи аналитического продолжения к задаче составления и решения систем линейных алгебраических уравнений. Некорректно поставленная задача решалась путем «принудительной» регуляризации, состоящей в присоединении дополнительных уравнений к прежней СЛАУ. Для этого рассматривались совместно две и более дискретные аппроксимации дифференциального оператора Лапласа и полученные таким образом переопределенные СЛАУ решались уже устойчиво (Страхов и др., 2001).

Следующая проблема состояла в необходимости разработать метод устойчивого решения систем линейных алгебраических уравнений больших порядков. Такой

метод был предложен академиком В.Н. Страховым (Страхов В.Н., Страхов А.В., 1999) и основывался на классическом подходе к использованию полиномов от матриц вместе с идеей подавления компонент спектра полезного сигнала.

Далее было необходимо разработать методику оценки точности расчетных значений поля в модельных примерах, полученных в результате решения СЛАУ в нижнем полупространстве, чтобы оценить степень близости интерпретационной картины, полученной в результате аналитического продолжения, к истинной. Если рассматривать тела простейших геометрических форм в качестве возмущающих объектов, то соответствующие интегралы, описывающие поля гравитационного потенциала и его производных (решения так называемой прямой задачи), вычисляются в конечном виде. Особенно простой вид решения прямой задачи имеют в двумерных условиях, которые здесь и рассматриваются. Следовательно, если в результате решения прямой задачи иметь в распоряжении аналитические формулы для гравитационных полей возмущающих тел простейших форм и принимать их значения в задаче аналитического продолжения в качестве заданных (измеренных) значений поля на поверхности Земли, а полученные в результате решения СЛАУ значения поля в нижнем полупространстве сравнивать по какой-либо норме с точными решениями той же прямой задачи в соответствующих точках, то можно оценивать точность значений поля, полученных в нижнем полупространстве при аналитическом продолжении.

Помимо решения задач постановочного характера и оценки точности расчетных значений поля решались следующие проблемы: фильтрация (обработки) вектора заданных значений поля, осложненного высокочастотной помехой; разработка технологий, позволяющих повысить точность расчетных значений поля в нижнем полупространстве; приведение результатов гравиметрической съемки к виду, необходимому в технологии оконтуривания при решении практических задач, и др.

Для решения вышеуказанных задач были разработаны соответствующие компьютерные программы, объединенные затем в пакет программ «GrAnM». В состав пакета также входит специальная компьютерная программа, визуализирующая результаты расчетов.

С использованием пакета программ «GrAnM» были проведены многочисленные вычислительные эксперименты в модельных условиях для установления закономерностей в поведении расчетного поля в нижнем полупространстве при аналитическом продолжении заданных значений гравитационного поля на уровнях $z=0$, $z=-h$ (h – шаг сетки; ось Oz направлена вниз) в нижнее полупространство с помощью дискретного уравнения Лапласа (Арсанукаев, 2003, 2004, 2009, 2010, 2013, 2014-2017). В качестве аномалиеобразующих объектов принимались, как уже отмечалось, однородные тела простейших геометрических форм и их комбинации. Например, рассматривались модельные примеры для разрезов (все бесконечной протяженности в направлении оси Oy), состоящих: а) из трех прямоугольных параллелепипедов – вертикальных пластов (геологический аналог – блоковые структуры типа горстов или грабенов) с различными избыточными плотностями; б) куполовидной структуры, также сложенной из вертикальных пластов (геологический аналог – соляные купола или карстовые пустоты); в) кругового горизонтального материального цилиндра (геологический аналог синклинальных или антиклинальных складок) и др. Параметры математических моделей этих разрезов (а именно шаг сетки, длина профилей, на которых расположены значения гравитационного поля, расстояние до верхней кромки возмущающих тел, геометрические размеры тел, избыточные плотности) принимались примерно одинаковыми.

«Измеренные» значения аномального гравитационного поля для этих разрезов находились в результате решения прямой задачи для вертикального пласта (в случае куполовидной структуры принималась суперпозиция решений прямых задач для

пластов, слагающих структуру) и кругового горизонтального материального цилиндра, представленных в виде соответствующих интегралов, каждый из которых вычисляется в квадратурах и, таким образом, дает точное решение прямой задачи соответственно (1), (2) (Андреев, Клушин, 1965):

$$\Delta g = f\sigma \left[x \ln(x^2 + z^2) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{z} \right]_{x_1, z_1}^{x_2, z_2}, \quad (1)$$

$$\Delta g = 2f\lambda \frac{h}{x^2 + h^2} \quad (2).$$

Как уже отмечалось, точные решения прямой задачи (1), (2) используются не только в качестве заданных значений поля на уровнях $z=0$, $z=-h$ при решении задачи аналитического продолжения, но и для оценки точности расчетных значений поля в нижнем полупространстве, получаемых в результате аналитического продолжения. Следует отметить, что пакет программ «GrAnM» обладает «открытой архитектурой», т.е. позволяет менять модули с решением прямых задач и моделировать таким образом различные геоплотностные неоднородности.

Прежде чем продолжить, дадим сведения о порядке СЛАУ, возникавших здесь при рассмотрении дискретного уравнения Лапласа совместно на двух шаблонах «прямой крест» и «косой крест» (две дискретные аппроксимации дифференциального оператора Лапласа).

Порядок матриц (A) и векторов правой части (f) при аналитическом продолжении до соответствующих отметок в нижнем полупространстве для модельного примера возмущающих тел (шаг сетки 0.2 км, длина профилей, на которых расположены значения гравитационного поля, равна 32 км, расстояние до верхней кромки возмущающих тел равно 4 км, геометрические размеры тел в виде прямоугольного сечения 4.8 км x 4.4 км, избыточная плотность равна 0.1г/см³) следующий:

$$4\text{км: } A=6360 \times 3220; f=6360 \times 1,$$

$$4\text{км: } A=6996 \times 3542; f=6996 \times 1,$$

$$5\text{км: } A=7950 \times 4025; f=7950 \times 1,$$

$$6\text{км: } A=9540 \times 4830; f=9540 \times 1,$$

где

4 км – отметка верхней кромки возмущающих тел; 4.4 км – отметка на 2 шага сетки ниже отметки верхней кромки; 5 км – отметка вблизи центра тяжести возмущающих объектов; 6 км – отметка вблизи центра тяжести возмущающих объектов.

В результате проведенных исследований было установлено, что элементы залегания (отметки верхней кромки и центра тяжести тел) для всех возмущающих тел определяются с хорошей точностью, а закономерности в поведении расчетного поля одни и те же. Что касается определения нижней кромки возмущающих тел, то в простейших случаях она определяется однозначно по отметкам верхней кромки и центра тяжести тел; в более общем случае для нахождения нижней кромки тел требуется априорная информация. Различия в поведении расчетного поля в нижнем полупространстве проявляются при построении функции Березкина, включающей вторые производные от расчетного гравитационного поля. Эти различия в поведении обусловлены различием форм поверхности возмущающих тел. В результате исследований по поведению расчетного поля было также установлено положение верхних особенностей по оси x отдельных элементов сложного построенного разреза (Арсанукаев, 2017).

Выявленные выше закономерности в вычислительных экспериментах при аналитическом продолжении заданных значений гравитационного поля в нижнее полупространство были положены в основу компьютерной технологии оконтуривания перспективных разрезов, имеющей одноименное название с пакетом программ «GrAnM» (Арсанукаев, 2010; Арсанукаев, Рудаковская, 2013). С помощью этой технологии создается библиотека решений для различных разрезов с построением атласа аномальных кривых.

Рассмотрим теперь, как в двумерном случае с использованием технологии «GrAnM» решается линейная обратная задача в модельных условиях для двух слоистых структур 1, 2 (рис. 1, 2).

Как можно видеть из рис. 3, поведение расчетных полей в нижнем полупространстве примерно одинаково для обеих

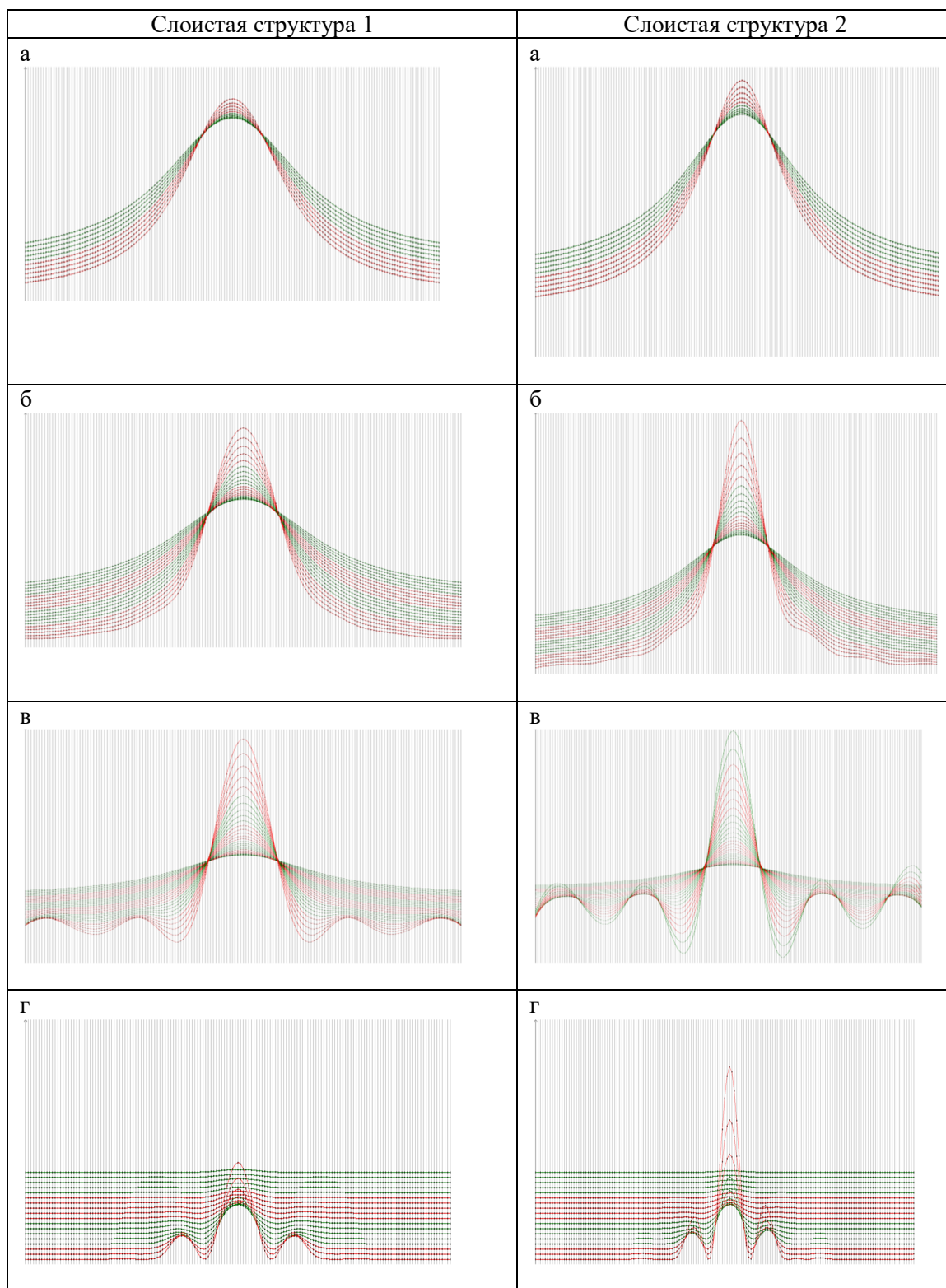


Рис 3 . Аномальные кривые и графики функции Березкина расчетных значений гравитационного поля (в 161 точках на каждом уровне) для модельного примера двух слоистых структур на профиле длиной 32 км при шаге сети, равном 200 м, при аналитическом продолжении в нижнее полупространство до отметки, равной: а – 2 км (10 кривых); б – 4км (20кривых); в – 6км (30 кривых); г– функция Березкина на отметке 4км

пластов с известными плотностями (рис. 2), составляющих слоистую структуру 2, получим систему (3')

$$\begin{aligned}\sigma_1 0.0131 + \dots + \sigma_5 0.0093 &= 0.0163 \\ \sigma_1 0.0134 + \dots + \sigma_5 0.0095 &= 0.0167\end{aligned}\quad (3')$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\sigma_1 0.0143 + \dots + \sigma_5 0.0101 = 0.0178$$

Для решения системы (3') использовался метод Хаусхолдера, представляющий собой разновидность прямых методов решения СЛАУ (Уилкинсон, Райнш, 1976). Были получены следующие значения избыточных плотностей (избыточные плотности находятся вычитанием из абсолютных плотностей пластов абсолютной плотности вмещающей среды, равной 2 г/см^3):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0.109926977696360, \\ \sigma_2 &= 0.180380071080015, \\ \sigma_3 &= 0.459271991074711, \\ \sigma_4 &= 0.530610244560195, \\ \sigma_{15} &= 0.249810664371966.\end{aligned}$$

Как можно видеть, расчетные значения избыточных плотностей очень близки искомым значениям.

Библиографический список

- Андреев Б. А., Клушин И.Г. Геологическое истолкование гравитационных аномалий. Л.: Недра, 1965. 495 с.
- Арсанукаев 3.3. О некоторых вычислительных экспериментах, проведенных с использованием методов теории дискретных физических полей при решении задач гравиметрии в двумерном случае. Ч. 1.Ч.2. Аналитическое продолжение в нижнее полупространство выше источников поля // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: матер. 30-й сессии Междунар. семинара им. Д.Г. Успенского (Москва, 27-31 января 2003 г.) / ОИФЗ РАН. М., 2003. С. 12-15.
- Арсанукаев 3. 3. Вычисление пространственных элементов аномальных полей с использованием методов теории дискретных гравитационных полей // Физика Земли. 2004. № 11. С. 47-69.
- Арсанукаев 3.3. Аналитическое продолжение заданных значений гравитационного поля в дискретной постановке через источники в двумерном случае // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. 2009. № 1. Вып.13. С. 47-57.
- Арсанукаев 3.3. О решении задачи пересчета вниз заданных значений гравитационного поля с использованием пакета программ «GrAnM» // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: матер. 37-й сессии Междунар. семинара им. Д.Г. Успенского (Москва, 25-29 января 2010 г.) / ИФЗ РАН. М., 2010. С.29 - 34.
- Арсанукаев 3.3. Выделение и оконтуривание гравитирующих объектов современным методом пересчета гравитационного поля в нижнее полупространство // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. 2013. № 1. Вып.21. С. 111-121.
- Арсанукаев 3.3., Рудаковская Е.Г. Новые технологии при решении задач гравиметрии и их применения при поиске полезных ископаемых // Вестник Пермского университета. Геология. 2013. Вып. 4(21). С.47-55.
- Арсанукаев3.3. О некоторых вычислительных экспериментах при решении задачи выделения геоплотностных неоднородностей с использованием пакета программ «GrAnM» // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: матер. 41-й сессии Междунар. семинара им. Д.Г. Успенского (27 – 31 января 2014 г.). Екатеринбург, 2014. С.19-22.
- Арсанукаев3.3. Применение технологии выделения перспективных разрезов посредством пакета программ «GrAnM» для куполовидных структур // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: матер. 42-й сессии Междунар. семинара им. Д.Г. Успенского (26 – 31 января 2015 г.). Пермь, 2015. С.9-11.
- Арсанукаев3.3. О особенностях использования технологии оконтуривания посредством пакета программ «GrAnM» для наклонных пластов // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: матер. 43-й сессии Междунар. семинара им. Д.Г. Успенского (26 – 30 января 2016 г.). Воронеж, 2016. С.21-23.
- Арсанукаев3.3. Исследование закономерностей в поведении расчетного гравитационного поля, полученного в результате аналитического продолжения, для анти-

клинальных и синклиналильные складок // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: матер. 44-й сессии Междунар. семинара им. Д.Г. Успенского (23-27 января 2017 г.) М., 2017. С. 29-33.

Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 380 с.

Страхов В. Н., Арсанукаев З.З., Страхов А. В. Использование методов теории дискретных гравитационных и магнитных полей при интерпретации аномальных полей //

Геофизика и математика: матер. 2-й Всерос. конф. (1-14 декабря 2001 г., Пермь) / ГИ УрО РАН. Пермь, 2001. С. 272-274.

Страхов В.Н., Страхов А.В. Основные методы нахождения устойчивых приближенных решений систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении задач гравиметрии и магнитометрии. I / ОИФЗ РАН. М., 1999. 40 с.

Уилкинсон, Райнш. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1976. 530с.

Solution of Linear Inverse Problem Using Computer Technology GrAnM

Z.Z. Arsanukaev, E.G. Rudakovskaya

Russian Chemical-Technological University named after D.I. Mendeleev

9 Miusskaya Square, Moscow 125047, Russia

E-mail: zaindy@mail.ru, rudeg@list.ru

The paper presents the results of studies on solving a gravity linear inverse problem for two layered structures using the computer technology GrAnM. Some aspects of the mathematical issues of the technology development process are presented. The results of calculations for determining the contours of structures and their densities are shown.

Key words: *analytic continuation; the discrete Laplace equation; systems of linear algebraic equations.*

Bibliography

Andreev B.A., Klushin I.G. 1965. Geologicheskoe istolkovanie gravitatsionnykh anomaliiy [Geological interpretation of gravity anomalies]. Nedra, Leningrad, p. 495. (in Russian)

Arsanukaev Z.Z. 2003. O nekotorykh vychislitelnykh eksperimentakh, provedyonnykh s ispolzovaniem metodov teorii diskretnykh fizicheskikh poley pri reshenii zadach gravimetrii v dvukhmernom sluchae [On some computational experiments carried out using methods of the theory of discrete physical fields for solving gravity problems in the two-dimensional case. In Questions of the theory and practice of geological interpretation of gravitational, magnetic and electric fields. Proceedings of the 30th session of the International Seminar named after D.G. Uspenskiy, Moscow January 27-31, OIFZ RAS, Moskva, pp. 12-15. (in Russian)

Arsanukaev Z.Z. 2004. Vychislenie prostanstvennykh elementov anomalnykh poley s ispolzovaniem metodov teorii diskretnykh gravitatsionnykh poley [Calculation of spatial

elements of anomalous fields using methods of the theory of discrete gravitational fields]. Fizika Zemli. 11:47-69. (in Russian)

Arsanukaev Z.Z. 2009. Analiticheskoe prodolzhenie zadannykh znacheniy gravitatsionnogo polya v diskretnoy postanovke cherez istochniki v dvumernom sluchae [Analytic continuation of the given values of the gravitational field in a discrete setting through sources in the two-dimensional case. Vestnik KRAUNTS. Nauki o Zemle. 1(13): 47-57. (in Russian)

Arsanukaev Z.Z. 2010. O reshenii zadachi pereschyota vniz zadannykh znacheniy gravitatsionnogo polya s ispolzovaniem paketa program GrAnM [On the solution of the problem of recalculating down the given values of the gravitational field using the GrAnM software package. In Questions of theory and practice of geological interpretation of gravitational, magnetic and electric fields. Materials of the 37th session of the International Seminar named after D.G. Uspenskiy. Moscow January 25-29, IPP RAS, Moskva, pp. 29 -34. (in Russian)

- Arsanukaev Z.Z.* 2013. Vydelenie i okonturivanie gravitiruyushchikh obektov sovremennym metodom pereshcheta gravitatsionnogo polya v nizhnee poluprostranstvo [Isolation and contouring of gravitating objects using the modern method of downward gravity continuation]. *Vestnik KRAUNTS. Nauki o Zemle.* 1(21): 111-121. (in Russian)
- Arsanukaev Z.Z., Rudakovskaya EG.* 2013. Novye tekhnologii pri reshenii zadach gravimetrii i ikh primeneniya pri poiske poleznykh iskopaemykh [New technologies at the decision of a problem of mineral resources search]. *Vestnik Permskogo universiteta. Geologiya.* 4(21): 47-55. (in Russian)
- Arsanukaev Z.Z.* 2014. O nekotorykh vychislitelnykh eksperimentakh pri reshenii zadachi vydeleniya geoplotnostnykh neodnorodnostey s ispolzovaniem paketa program GrAnM [On some computational experiments in solving the problem of isolating the geodensity inhomogeneities using the GrAnM software]. *In Questions of theory and practice of geological interpretation of gravitational, magnetic and electric fields. Materials of the 41st session of the International Seminar named after D.G. Uspenskiy. January 27 - January 31, Ekaterinburg,* p. 19-22. (in Russian)
- Arsanukaev Z.Z.* 2015. Primenenie tekhnologii vydeleniya perspektivnykh razrezov posredstvom paketa program GrAnM dlya kupolovidnykh struktur [The use of technology for selection the prospective sections using the GrAnM program package for dome structures]. *In Questions of theory and practice of geological interpretation of gravitational, magnetic and electric fields. Materials of the 42nd session of the International Seminar named after D.G. Uspenskiy. January 26 - January 31, Perm,* pp. 9-11. (in Russian)
- Arsanukaev Z.Z.* 2016. Ob osobennostyakh ispolzovaniya tekhnologii okonturivaniya posredstvom paketa program GrAnM dlya naklonnykh plastov [On the features of contouring technology using the GrAnM software package for inclined reservoirs]. *In Questions of theory and practice of geological interpretation of gravitational, magnetic and electric fields. Materials of the 43rd session of the International Seminar named after D.G. Uspenskiy. January 26 - January 30, Voronezh,* pp. 21-23. (in Russian)
- Arsanukaev Z.Z.* 2017. Issledovanie zakonmernostey v povedenii raschetnogo gravitatsionnogo polya poluchennogo v rezultate analiticheskogo prodolzheniya dlya antiklinalnykh i sinklinalnykh skladok [Investigation of regularities in the behavior of the calculated gravitational field, obtained as a result of analytical continuation, for anticlinal and synclinal folds]. *In Questions of the theory and practice of geological interpretation of gravitational, magnetic and electric fields. Materials of the 44th session of the International Seminar named after D.G. Uspenskiy. January 23-27, Moscow,* pp. 29-33. (in Russian)
- Samarskii A.A.* 1971. Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem [Introduction to the theory of differentiation schemes]. Nauka, Moskva, p. 380. (in Russian)
- Strakhov V.N., Arsanukaev Z.Z., Strakhov A.V.* 2001. Ispolzovanie metodov teorii diskretnykh gravitatsionnykh i magnitnykh poly pri interpretatsii anomalnykh poly [Use of methods of the theory of discrete gravitational and magnetic fields in the interpretation of anomalous fields]. *In Geofizika i matematika. Materials of the 2nd All-Russian Conference. December 1-14, Perm: GI UB RAS,* pp. 272-274. (in Russian)
- Strakhov V.N., Strakhov A.V.* 1999. Osnovnye metody nakhozhdeniya ustoychivyykh priblizhennykh resheniy system lineynykh algebraicheskikh uravneniy voznikayushchikh pri reshenii zadach gravimetrii i magnetometrii [Basic methods of finding the stable approximate solutions of systems of linear algebraic equations arising in the solution of problems of gravimetry and magnetometry]. OIFZ RAN, Moskva, p. 40. (in Russian)
- Wilkinson J.H., Reinsch C.* 1971. Handbook for automatic computation. V. 2. Linear algebra. Springer.