

ГЕОФИЗИКА

УДК 550.83

Применение теории потенциала при численном решении обратной задачи гравиметрии**З.З. Арсанукаев, Е.Г. Рудаковская**Российский государственный химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева
125047, Москва, ул. Миусская, 9. E-mail: zaindy@mail.ru*(Статья поступила в редакцию 11 мая 2022 г.)*

В статье рассматриваются результаты исследования при решении обратной задачи гравиметрии. Показывается, что решение обратной задачи должно происходить в два этапа. На первом шаге определяется контур области, занятой тяготеющими массами, с использованием уравнения Лапласа. На втором шаге используется обобщение уравнения Пуассона для определения плотности распределения масс, заполняющих область, контур которой определен на первом шаге. При этом при постановке задачи аналитического продолжения применяются положения теории потенциала. Приводятся результаты численных расчетов на модельном примере с определением неизвестных значений плотности и значений гравитационного поля внутри области, заполненной гравитирующими массами.

Ключевые слова: *аналитическое продолжение, уравнение Лапласа, теория потенциала.*

DOI: 10.17072/psu.geol.21.3.237

Введение

Важнейшее место в гравиметрии занимает задача аналитического продолжения заданных значений поля на поверхности Земли в нижнее (верхнее) полупространство. Вопросами аналитического продолжения, определения особых точек гравитационных полей занимались такие ученые, как Т.М. Воскобойников, А.А. Логачев, В.И. Андреев, В.М. Березкин и многие другие. В.Н. Страховым был предложен подход по аналитическому продолжению значений, в основе которого лежит разработанный им метод дискретных аппроксимаций физических полей (Страхов, Арсанукаев, 2002). Реализация этого подхода с использованием соответствующих дискретных схем связана с заменой вторых частных производных дифференциального оператора уравнения Лапласа вторыми разделенными разностями; непрерывные функции заменяются сеточными функциями. В результате задача аналитического продолжения заданных значений гравитационного поля в нижнее полупространство с использованием уравнения Лапласа сводится к задаче составления

и решения систем линейных алгебраических уравнений. Указанный подход был использован при проведении целого ряда вычислительных экспериментов по аналитическому продолжению для гравитирующих тел с различными формой поверхности и плотностью (Арсанукаев, 2013, 2015, 2016, 2017). Была разработана специальная методика оценки точности расчетных значений гравитационного поля, получаемых в нижнем полупространстве по заданным значениям; системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающие при решении задачи аналитического продолжения, решались методом простой итерации. Следует отметить, что задача аналитического продолжения, решение которой приведено выше, является некорректно поставленной в смысле классической постановки задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Действительно, заданные значения, определяемые на практике по результатам гравиметрической съемки, располагаются только на части контура (в отличии от классической постановки), имеющего форму прямоугольника, обычно на дневной поверхности Земли. Тем не менее были получены вполне удовлетворительные

результаты при аналитическом продолжении, когда заданные значения поля располагались на уровнях (профилях): на уровне Земли: $z = 0$ и на уровне шага сетки выше уровня Земли: $z = -h$ (ось Oz направлена вниз). По результатам аналитического продолжения уверенно определяются верхняя кромка области, заполненной тяготеющими массами, особые точки (при наличии), центр тяжести области и с меньшей точностью положение нижней кромки области.

Следующим шагом в решении обратной задачи гравиметрии, после определения на первом шаге контура области, заполненной массами, может быть определение плотности масс также в результате аналитического продолжения, но теперь внутри области, занятой массами. Заданными значениями по всему контуру области при аналитическом продолжении будут являться значения гравитационного поля, полученные на первом шаге, как указано выше. Но при аналитическом продолжении внутри области, заполненной массами, очевидно, предварительно необходимо решить две основные проблемы. Во-первых, известная формула Пуассона, описывающая поле гравитационного потенциала внутри масс, здесь непригодна, поскольку при решении задачи аналитического продолжения на первом шаге с помощью уравнения Лапласа, описывающего поле гравитационного потенциала (и его производных) вне масс, заданными значениями являются значения вертикального градиента потенциала (аномалия силы тяжести Δq , полученная в результате гравиметрической съемки); соответственно, «входные» значения поля, которые будут использованы при аналитическом продолжении уже внутри масс, будут значениями поля первой производной потенциала (а не просто потенциала). Во-вторых, для существования решения необходимо, чтобы поле первой производной потенциала было непрерывным во всем пространстве – как внутри масс, так и вне масс.

Остановимся на этих вопросах подробнее (Идельсон, 1932; Sternberg 1974; Mac-Millan, 1930).

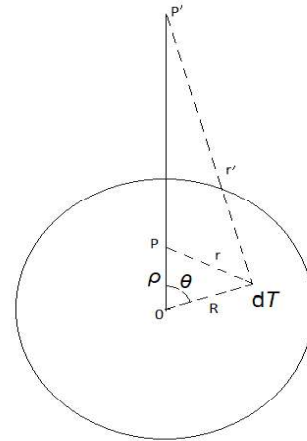


Рис. 1. Однородная сфера

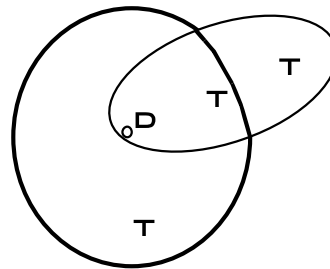


Рис. 2. Тело переменной плотности

Потенциал ее на точку наблюдения P есть

$$V(P) = \int_T \frac{\rho d\tau}{r}, \tag{1}$$

где интегрирование распространено на весь объем сферы T . Для выполнения квадратур возьмем систему полярных координат с началом в центре сферы и направим полярную ось на точку наблюдения P (рис. 1). Смотря по тому, будет ли лежать она внутри сферы или вне ее (в P'), у нас будет $\rho < R$ или же $\rho > R$. Но во всех случаях расстояние r от P до переменного элемента $d\tau$ объема определится по формуле $r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \theta$ (2).

При интегрировании ρ будет величиной постоянной; напротив того, R будет переменной, принимающей значения от 0 до данного R . При этих условиях элемент объема запишется как

$$d\tau = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho \tag{3}$$

и поэтому

$$V(P) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\mu R^2 \sin \theta d\theta d\varphi dR}{\sqrt{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos \theta}} \quad (4)$$

Интеграл (4) вычисляется в квадратурах с возникновением двух возможностей:

а) $\rho > R$, т.е. притяжение на внешнюю точку P' . Потенциал в этом случае равен:

$$V(P') = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{1}{\rho}$$

Но $\frac{4}{3} \pi R^3$ есть масса всей сферы M , и мы получаем:

$$V(P') = \frac{M}{\rho} \quad (5)$$

Таким образом, потенциал всей сферы свелся здесь к точечному потенциалу: однородная сфера притягивает внешнюю точку так, как если бы вся ее масса была сосредоточена в ее центре. Этот результат легко распространяется на случай сферы, состоящей из однородных концентрационных слоев. Такая сфера тоже притягивает внешнюю точку так, как если бы вся масса была сосредоточена в ее центре.

б) $\rho < R$, т.е. притяжение на внутреннюю точку P . Теперь потенциал

$$V(P) = 2\pi\mu \left(R^2 - \frac{\rho^2}{3} \right) \quad (6)$$

равен (6). Вводя в эту формулу массу сферы M , т.е. полагая $R^2 = \frac{3M}{4\pi\mu}$, можем переписать предыдущее выражение в виде

$$V(P) = \frac{3M}{2R} \left(1 - \frac{\rho^2}{3R^2} \right) \quad (7)$$

Из формул (5), (6), (7) вытекает ряд важных следствий, а именно:

1) Потенциал однородной сферы есть функция, ограниченная и непрерывная во всем пространстве: и внутри массы, и вне ее, в точках \bar{P} поверхности сферы, т.е. при $\rho = R$ обе формулы (5) и (7) дают

$$V(\bar{P}) = \frac{M}{R}$$

2) Потенциал достигает своего максимального значения внутри сферы, именно в ее центре ($\rho = 0$), где он равен

$$V(0) = \frac{3M}{2R} = 2\pi\mu R^2 \quad (8)$$

От этого максимального значения потенциал $V(P)$ непрерывно убывает и при $\rho \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Причем характер изменения потенциала как функции ρ внутри сферы носит параболический характер, вне сферы он убывает по гиперболическому закону.

3) Первые производные потенциала однородной сферы являются функциями, ограниченными и непрерывными во всем пространстве; мы имеем:

$$\text{(внутри массы; } \rho < R) \quad (9)$$

$$\text{(вне массы; } \rho > R). \quad (9a)$$

На границе, при $\rho = R$ обе формулы дают

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{M\rho}{R^3} \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{M}{R^2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{M}{\rho^2}$$

4) Потенциал $V(P)$ как функция координат точки P удовлетворяет вне сферы уравнению Лапласа: $\Delta_p V = 0$; внутри сферы он удовлетворяет уравнению

$$\Delta_p V = -4\pi\mu$$

Справедливость первой части следствиям можно установить непосредственным дифференцированием; для доказательства второй достаточно заметить, что внутри сферы потенциал ввиду (6) равен:

$$V(P) = \text{const} - \frac{2\pi\mu}{3} \rho^2 = \text{const} - \frac{2\pi\mu}{3} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

но

$$\frac{\partial^2(\xi^2)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2(\eta^2)}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2(\zeta^2)}{\partial \zeta^2} = 2$$

и поэтому действительно

$$\Delta_P V = -\frac{2\pi\mu}{3} \cdot 6 = -4\pi\mu. \quad (11)$$

Уравнение (11) носит название уравнения Пуассона; мы заключаем теперь, что уравнение Лапласа есть только его частный случай: вне сферы $\mu = 0$, так что уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа, и мы можем сказать, что потенциал V удовлетворяет во всем пространстве уравнению

$$\Delta_P V = -4\pi\mu.$$

Полученные результаты для потенциала однородной сферы нетрудно перенести на случай произвольного распределения объемных масс с переменной плотностью. Начнем с доказательства справедливости следующего утверждения:

Потенциал любого объема и на любую точку меньше, чем потенциал сферы равного объема на ее центр.

Пусть T есть данный объем, P – точка внутри его. Опишем вокруг P сферу, объем которой был бы равен T ; пусть R – ее радиус (рис. 2).

Тогда объем T распадется на части T_1 (внутри сферы) и T_2 (вне ее). Обозначим через T_3 ту часть объема сферы, которая лежит вне T ; очевидно $T_3 = T_2$. Допустим теперь, что тело однородно и плотность его равна 1. Тогда потенциал T на $P =$

$$\int_{T_1} \frac{d\tau}{r} + \int_{T_2} \frac{d\tau}{r}, \text{ а потенциал сферы на } P =$$

$$\int_{T_1} \frac{d\tau}{r} + \int_{T_3} \frac{d\tau}{r}. \text{ Покажем сейчас, что}$$

$$\int_{T_3} \frac{d\tau}{r} > \int_{T_2} \frac{d\tau}{r}, \text{ откуда и будет}$$

следовать, что потенциал сферы больше потенциала объема T . Для этого

$$\text{достаточно заметить, что } \int_{T_2} \frac{d\tau}{r} < \frac{T_2}{R},$$

так как расстояния элементов объема T_2 до P больше R , и что, так как расстояния элементов T_3 до P меньше R , $T_3 = T_2$ и

$$\int_{T_3} \frac{d\tau}{r} > \frac{T_3}{R},$$

$$\int_{T_3} \frac{d\tau}{r} > \frac{T_2}{R} > \int_{T_2} \frac{d\tau}{r}. \quad (12)$$

Нетрудно привести доказательство и для случая, когда P находится вне T ; потенциал и здесь меньше $2\pi\mu R^2$, где R – радиус сферы, объем которой равен T . Наконец, если тело T неоднородно, то плотность его, которую мы должны считать ограниченной, будет меньше некоторого максимального значения μ' ; в этом случае потенциал T на любую точку P меньше, чем $2\pi\mu'R^2$, где R есть радиус сферы, объем которого равен T .

Из доказанного положения следует, что потенциал объемных масс есть функция, ограниченная во всем пространстве, иными словами,

$$\int_T \frac{\mu d\Omega}{r}$$

есть интеграл всегда сходящийся, несмотря на нуль, который появляется в знаменателе, когда P находится внутри T ; более того, отсюда вытекает, что *объемный потенциал есть функция непрерывная во всем пространстве*; он не терпит разрыва, когда P переходит из данной массы во внешнее пространство; чтобы убедиться в этом, достаточно вырезать из T объем T' , заключающий P , тогда потенциал остальных масс есть функция непрерывная, где бы ни лежала точка P внутри T' ; но потенциал T' на P меньше $2\pi\mu'R^2$, где R – радиус сферы, объем которой равен T' ; при $R \rightarrow 0$ этот потенциал идет, очевидно, к нулю.

Аналогично случаю объемного потенциала можно показать, что первая производная объемного потенциала есть функция координат, ограниченная и непрерывная во всем пространстве.

Для объемного потенциала справедлива теорема Пуассона, как и для однородной сферы в следующей форме: *Во всех внутренних точках объема T потенциал $V(p)$ удовлетворяет уравнению*

$$\Delta_P(V) = -4\pi\mu(P),$$

где $\mu(P)$ означает плотность в точке P .

Для доказательства, следуя Грину, выделим внутри объема T сферу Σ , окружающую P , при этом потенциал всего тела T на P разобьется тогда на две части; одна из них (V''), будет зависеть от масс, лежащих вне сферы: другая (V') – от масс, находящихся внутри ее. Если теперь неограниченно уменьшать размеры сферы, ее можно было бы считать однородной с плотностью той же, что и в лежащей внутри сферы точке P , так что в пределе получим при $V' \rightarrow V$ $\Delta_P(V) = -4\pi\mu(P)$, как для потенциала V однородной сферы (V'' как потенциал масс, лежащих вне сферы, будет удовлетворять уравнению Лапласа).

И наконец выведем результат, являющийся обобщением формулы Пуассона (11) для поля производной объемного потенциала внутри притягивающих масс. Вначале найдем производную потенциала

$$V(P) = 2\pi\mu(R^2 - \frac{\rho^2}{3}), \text{ равную } \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{4}{3}\mu\pi\rho.$$

Затем продифференцируем дважды по ξ, η, ζ выражение для ρ :

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{\rho}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\rho} - \frac{\xi^2}{\rho^3}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial \eta} &= \frac{\eta}{\rho}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\rho} - \frac{\eta^2}{\rho^3}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} &= \frac{\zeta}{\rho}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\rho} - \frac{\zeta^2}{\rho^3}. \end{aligned}$$

Складывая полученные вторые производные и умножая на $-\frac{4}{3}\mu\pi$, получим:

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) &= -\frac{4}{3}\mu\pi\left(\frac{3}{\rho} - \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\rho^3}\right) = -\frac{4}{3}\mu\pi\left(\frac{3}{\rho} - \frac{1}{\rho}\right) = \\ &= -\frac{8}{3\rho}\mu\pi, \end{aligned}$$

т.е. окончательно

$$\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) = -\frac{8}{3\rho}\mu\pi. \quad (13)$$

В связи с вышеизложенным, определение распределения плотности внутри гравитирующих масс будет происходить в следующей последовательности:

1) значения поля Δq , найденные в результате проведения гравиметрической съемки на поверхности Земли, пересчитываются на заданные горизонтальные уровни $z = -h, z = 0$ (ось Oz направлена вниз) в узлы равномерной сетки с заданным шагом;

2) полученные в п. 1 значения поля на заданных горизонтальных уровнях в узлах равномерной сетки используются в качестве «входных» значений при решении задачи аналитического продолжения (восстановления) значений поля вокруг источника поля с использованием дискретных аппроксимаций оператора Лапласа; по найденным в результате аналитического продолжения значениям поля в нижнем полупространстве определяется контур области, заполненной тяготеющими массами;

3) восстановленные в п. 2 на границе источника значения поля используются в качестве «входных» значений при решении уравнения Пуассона в его обобщенной форме (13) внутри притягивающих масс, поскольку потенциал объемных масс (и его первые производные), как показано выше, является всюду непрерывной функцией и его значения (и первых его производных) вне масс и внутри масс совпадают в точках поверхности ограничивающей массы. Данная технология была реализована в условиях модельного примера вертикального пласта, имеющего размеры 4.8×4.0 км в плоскости Oxz однородной плотности с $\mu = 0.1 \text{ г/см}^3$ и бесконечной протяженности в направлении оси y , т.е. в условиях двумерной задачи (рис. 3).

Таким образом, здесь решается задача: по «входным» значениям поля, заданным по всему контуру прямого пласта с использованием дискретных аппроксимаций уравнения (13) восстановить значения поля вертикального градиента потенциала и значения сеточных масс (плотностей) внутри прямого пласта. Вводя внутри прямого пласта равномерную сетку с шагом $h=0,2$ км, получим 23 внутренних узла сетки, расположенные на 19 уровнях. Таким образом, число искоемых неизвестных значений поля dV/dz будет равно

437 (23x19) и, присоединяя к ним 437 неизвестных значений сеточных плотностей, получим, что общее число неизвестных равно 874. Дискретный аналог уравнения (13) здесь рассматривается на составном шаблоне «прямой крест + косой крест», (что обеспечивает устойчивость решения СЛАУ методом итерации), так что число уравнений здесь равно 920 (23x20x2). Таким образом, здесь возникает СЛАУ с переопределенной матрицей $A = 920 \times 874$ и правой частью $f = 920 \times 1$.

Для формирования элементов матрицы была составлена компьютерная программа `rgPUAS`. Как формируются элементы при определении неизвестных значений поля – об этом подробно в (Арсанукаев, 2004). Однако в связи с тем, что здесь необходимо найти неизвестные 437 значения сеточных масс, покажем, как формируется, например, 24-я строка матрицы, содержащая 874 элемента, из которых только 4 ненулевые (первые 23 уравнения не содержат в качестве неизвестных сеточные плотности).

Пусть центр шаблона «прямой крест» находится во внутреннем узле под номером 1 (рис. 3), тогда обобщенная форма уравнения Пуассона (13) будет иметь вид (14)

$$C_1 u_{1,1} + C_0 u_{2,1} + C_1 u_{3,1} + C_2 u_{2,0} + C_2 u_{2,2} + r_{1,1} \mu_{1,1} = 0$$

(1) (2) (24) (438)

где $C_1 = C_2 = 1$, $C_0 = -4$ – коэффициенты шаблонов «прямой крест», «косой крест»;

$u_{1,1} = \varphi_{1,1}$; $u_{2,0} = \varphi_{2,0}$ – заданные «входные» значения поля (они находятся в результате решения прямой задачи для вертикального пласта однородной плотности $\mu = 0.1 \text{ г/см}^3$ и в условиях двумерной задачи) $r_{1,1}$ вычисляются по формуле $r_{1,1} = -\frac{8\pi}{3\rho_{1,1}}$ (компьютерная программа `rgPDOP`); $u_{2,1} u_{3,1} u_{2,2}$ – неизвестные значения поля $\frac{\partial V}{\partial z}$; $\mu_{1,1}$ – неизвестные значения сеточных плотностей (первый нижний индекс означает номер неизвестных и известных величин на данном уровне, второй нижний индекс означает номер уровня).

Перенесем известные величины в правую часть (14), проведем необходимые вычисления и обозначим результат через f_{24} ; таким

образом получаем 24-ую компоненту вектора f_{24} , а уравнение (14) приобретает вид (15):

$$C_0 u_{2,1} + C_1 u_{3,1} + C_2 u_{2,2} + r_{1,1} \mu_{1,1} = f_{24}$$

(1) (2) (24) (438)

Таким образом, в 24 строке матрицы A находятся 4 ненулевых элемента $C_0, C_1, C_2, r_{1,1}$ соответственно в 1, 2, 24, 438 столбцах (оставшиеся элементы из 437 элементов 24 строки – нулевые) и т.д. до 460 строки.

Аналогично формируются следующие 460 строк матрицы A , рассматривая дискретный аналог уравнения Пуассона на шаблоне «косой крест». Вектор правой части $f = 920 \times 1$ в СЛАУ составляется с использованием компьютерной программы `rg607KF`. Далее полученная СЛАУ решается с использованием пакета программ [10]; время решения СЛАУ с матрицей $A = 920 \times 874$ составило 00:00:30 (ноутбук DELL, тактовая частота 2 ГГц).

Как показали результаты расчетов, в векторе решения СЛАУ, имеющем 874 компоненты, значения поля dV/dz и значения плотности значительно различаются, как и следует, по абсолютной величине: первые величины порядка $\sim 10^{-4} - 10^{-3}$, вторые $\sim 10^{-1} - 10^1$. Далее, если область внутри прямого пласта разбить на 3 подобласти I, II, III, содержащих соответственно по 181, 181 и 75 внутренних узлов (рис. 4), то, усредняя значения плотности по всем узлам, получим, что наиболее близкой к истинной (равной 0.1 г/см^3) является плотность во II области, затем в I; в III области, содержащей относительно небольшое количество точек, плотность уже значительно отличается от истинной (рис. 4а, 4б, 4в).

Для значений поля dV/dz внутри прямого пласта (рис. 5) результаты расчетов показали, что здесь справедливы следующие закономерности. Значения поля убывают от периферии прямого пласта к его центру, как видно из рис. 5а, 5б, 5в (вне масс, напротив, от центра к периферии); при приближении к центру значения поля, представленные аномальными кривыми на рис. 5г–5и, колеблются около центра прямого пласта за исключением значений поля в небольшом количестве узлов по краям профилей, что подтверждает результат (9) о том, что поле силы тяжести в центре сферы равно нулю.

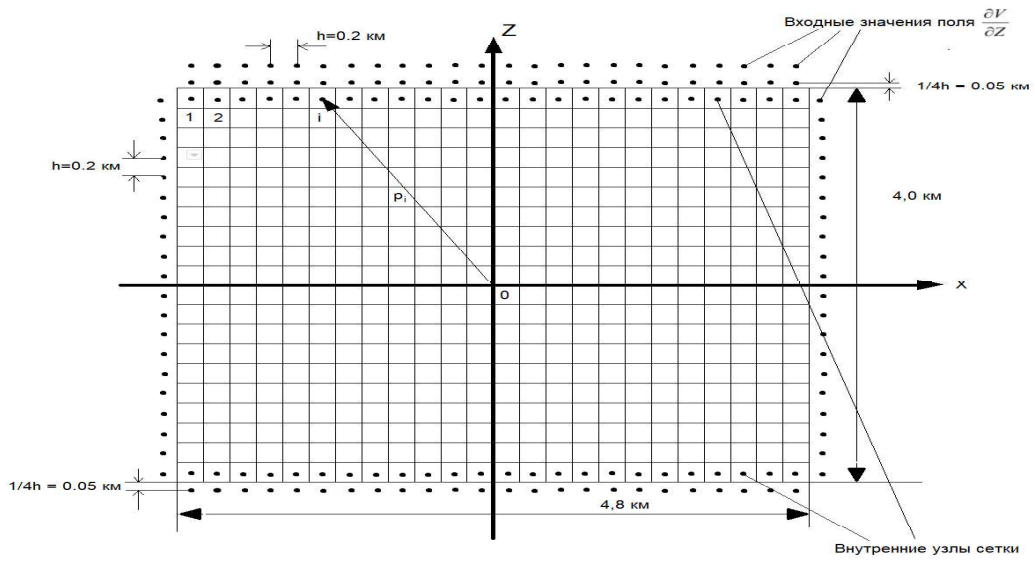
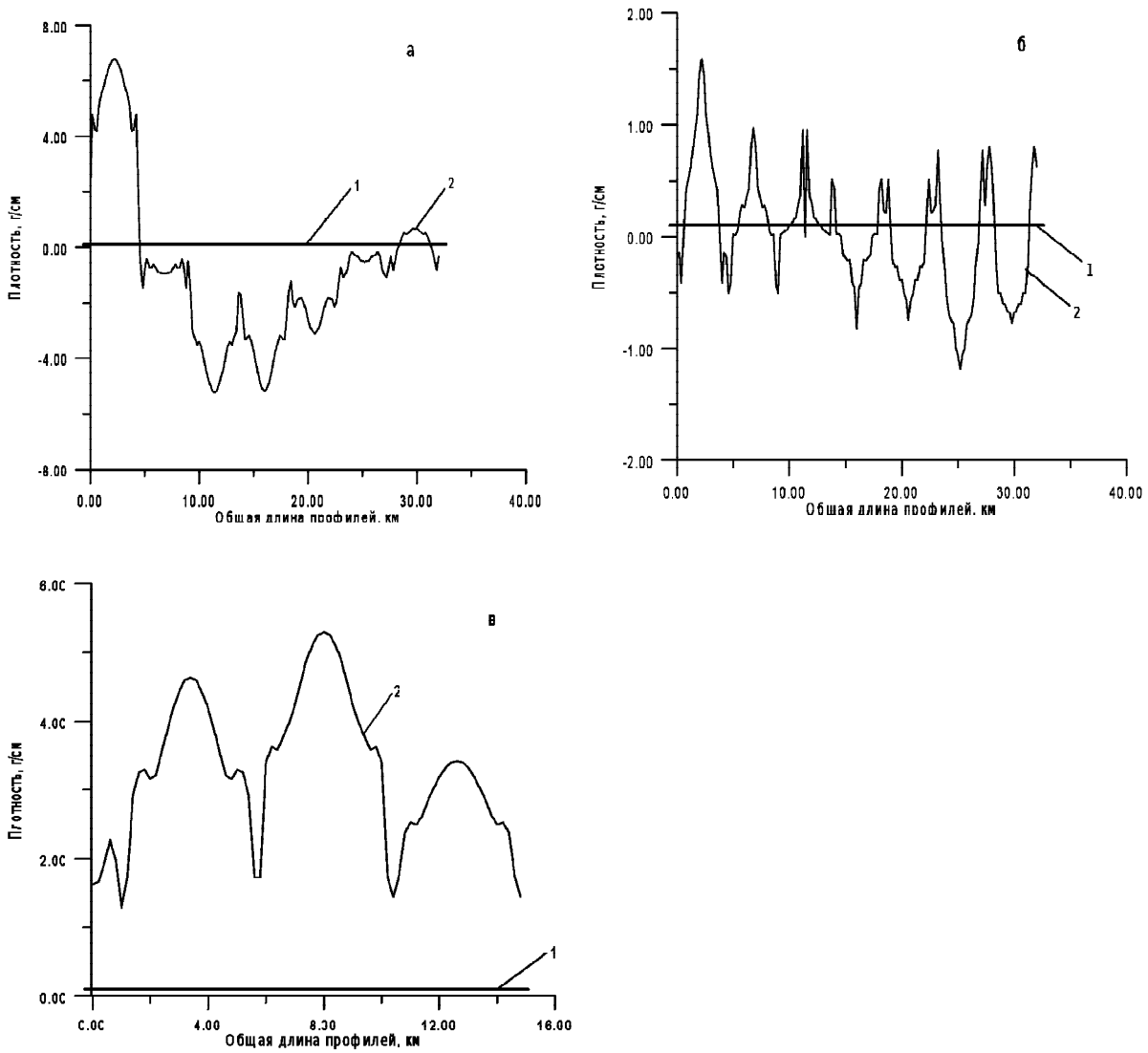


Рис. 3. Расчетная схема модельного примера вертикального пласта



а - область I внутри пласта, содержащая 181 узлов сетки;
 б - область II внутри пласта, содержащая 181 узлов сетки;
 в - область III внутри пласта, содержащая 75 узлов сетки.
 1 - точное значение плотности, равное 0,1 г/см³ ;
 2 - восстановленное значение плотности.

Рис. 4. Результаты расчета плотности тяготеющих масс

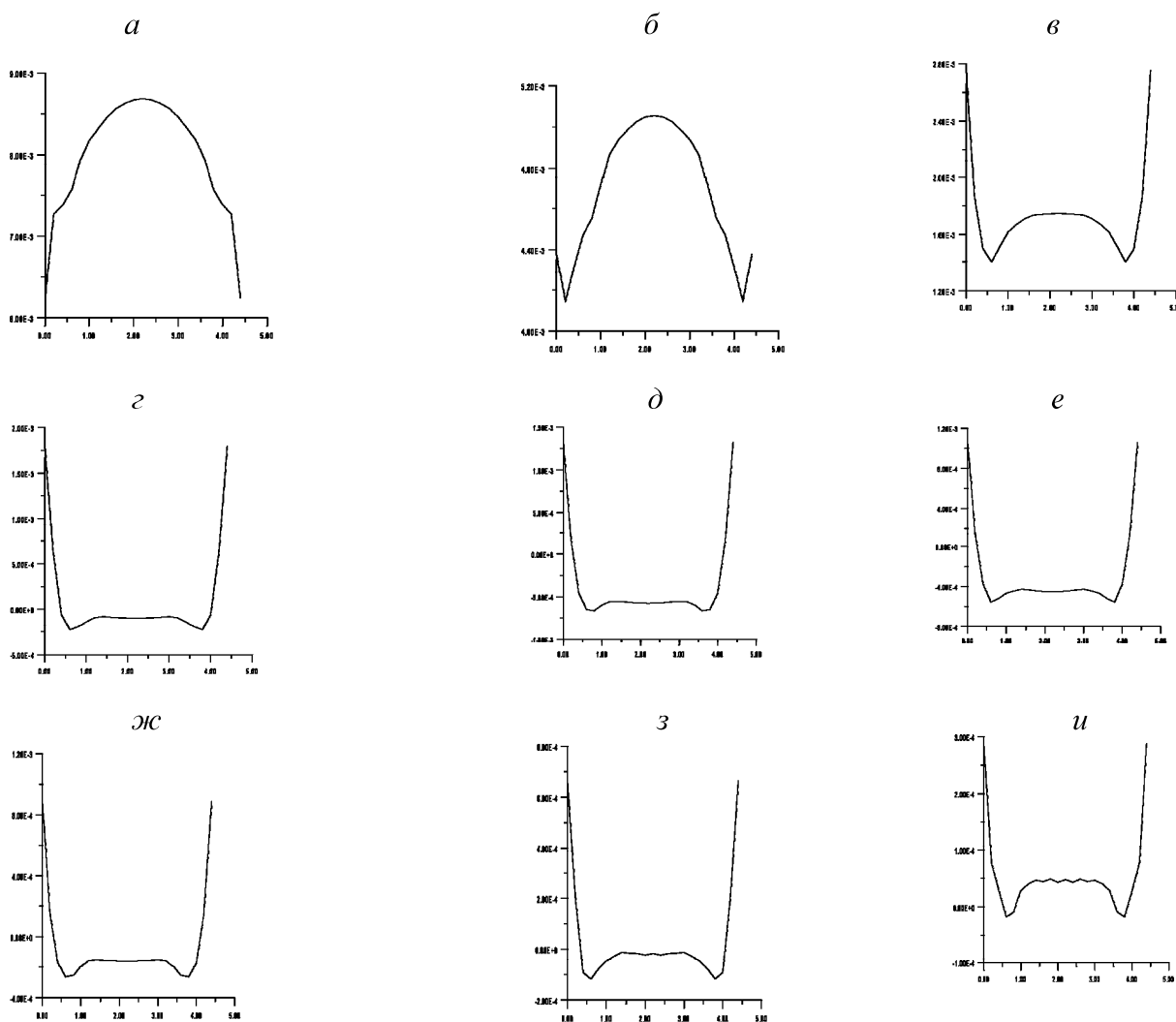


Рис. 5. Результаты расчета поля вертикального градиента гравитационного потенциала. Аномальные кривые поля $\frac{\partial V}{\partial z}$ (см/сек²) внутри вертикального пласта на профилях длиной 4.6 км: а – на расстоянии 0.2 км от верхней кромки вертикального пласта; б – на расстоянии 0.4 км от верхней кромки вертикального пласта; в – на расстоянии 0.6 км от верхней кромки вертикального пласта; г – на расстоянии 0.8 км от верхней кромки вертикального пласта; д – на расстоянии 1.0 км от верхней кромки вертикального пласта; е – на расстоянии 1.2 км от верхней кромки вертикального пласта; ж – на расстоянии 1.4 км от верхней кромки вертикального пласта; з – на расстоянии 1.6 км от верхней кромки вертикального пласта; и – на расстоянии 1.8 км от верхней кромки вертикального пласта

Заключение. В результате проведенных исследований установлено, что решение задачи аналитического продолжения заданных значений гравитационного поля на поверхности Земли позволяет на первом шаге оконтурить область, заполненную тяготеющими массами, а затем на втором шаге – определить плотность распределения масс в найденной области. Численный расчет, проведенный на модельном примере с использованием пакета программ, разработанным первым из авторов, показывает, что расчетные значения плотности близки к истинным

значениям в средней части гравитирующего объекта; а расчетные значения гравитационного поля отвечают в качественном отношении закономерностям в поведении поля внутри масс, предсказанными теорией потенциала.

Библиографический список

Арсанукаев 3.3. Выделение и оконтуривание гравитирующих объектов современным методом пересчета гравитационного поля в нижнее полупространство. Ж-л «Вестник КРАУНЦ.

Арсанукаев З.З. Вычисление пространственных элементов аномальных полей с использованием методов теории дискретных гравитационных полей. Ж-л «Физика Земли» № 11, 2004. С. 47–69.

Арсанукаев З.З. Исследование закономерностей в поведении расчетного гравитационного поля, полученного в результате аналитического продолжения, для антиклинальных и синклиналиных складок. Материалы 44-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей». 23–27 января 2017, Москва. С. 29–33.

Арсанукаев З.З. Об особенностях использования технологии оконтуривания посредством пакета программ «GrAnM» для наклонных пластов. Материалы 43-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей». 26–30 января 2016, Воронеж, 2016. С. 21–23.

Арсанукаев З.З. Применение технологии выделения перспективных разрезов посредством пакета программ «GrAnM» для куполовидных структур. Материалы 42-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации

гравитационных, магнитных и электрических полей». 26–31 января 2015, Пермь, 2015. С. 9–11.

Арсанукаев З.З., Арсанукаев И.З. Программа аналитического продолжения заданных на поверхности Земли значений гравитационного поля в нижнее полупространство с использованием дискретных схем и решения систем линейных алгебраических уравнений больших порядков на модельных примерах. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ (SOFT).#2015661026, 15 октября 2015 г.

Идельсон Н.И. Теория потенциала и ее приложения к вопросам геофизики. ГТТИ, Ленинград, Москва, 1932. 384 с.

Науки о Земле» 2013. № 1. Выпуск 21. С. 231–241.

Страхов В.Н., Арсанукаев З.З. Теория дискретного гравитационного поля (двухмерный вариант) и ее использование при решении задач гравиметрии. Материалы 28-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей». Екатеринбург, 28 января – 2 февраля 2002. В двух частях. Ч.II. М.: ОИФЗ РАН, 2002. С. 73–77.

Mac-Millan. The theory of the Potential (N.-Y., Mc Grawhill, 1930)

Sternberg. Potentialtheorie (Sammlung Goschen, NN 901 und 974).

Application of Potential Theory in the Numerical Solution of the Inverse Problem of Gravimetry

Z.Z. Arsanukaev, E.G. Rudakovskaya

Russian State University of Chemical Technology named after V.I. D. I. Mendeleev, 9 Miusskaya Str., Moscow 125047, Russia. E-mail: zaindy@mail.ru

This article discusses the results of a study in solving the inverse problem of gravimetry. It is shown that the solution of the inverse problem should be conducted in two stages. At the first step, the contour of the area occupied by gravitation masses is determined using the Laplace equation. At the second step, a generalization of the Poisson equation is used to determine the density distribution of the masses that fill the area, whose contour is determined at the first step. In this case, when setting the problem of analytic continuation, the provisions of potential theory are applied. The results of numerical calculations are presented on a model example with the determination of unknown values of density and values of the gravitational field inside a region filled with gravitation masses.

Keywords: *analytic continuation; Laplace equation; potential theory.*

References

Strakhov V.N., Arsanukaev Z.Z. 2002. Teoriya diskretnogo gravitatsionnogo polya (dvukhmernyy variant) i eyo ispolzovanie pri reshenii zadach grav-

imetrii [Theory of a discrete gravitational field (two-dimensional version) and its use in solving problems of gravimetry]. In: Voprosy teorii i praktiki geologicheskoy interpretatsii gravitatsionnykh, magnitnykh i elektricheskikh poley. Proc. of the International

Seminar after D.G. Uspenskiy. Yekaterinburg, Part II, pp. 73–77. (in Russian)

Arsanukaev Z.Z. 2013. Vydelenie i okonturivanie gravitiruyushchikh obyektov sovremennym metodom pereschyota gravitatsionnogo polya v nizhnee poluprostranstvo [Selection and contouring of gravitating objects by a modern method of recalculating the gravitational field into the lower half-space]. Vestnik KRAUNTs. Nauki o Zemle. 21:231–241. (in Russian)

Arsanukaev Z.Z. 2015. Primenenie tekhnologii vydeleniya perspektivnykh razrezov posredstvom paketa program GrAnM dlya kupolovidnykh struktur [Application of technology for highlighting the promising sections using the GranM software package for dome-shaped structures]. In: Voprosy teorii i praktiki geologicheskoy interpretatsii gravitatsionnykh, magnitnykh i elektricheskikh poley. Proc. of the International Seminar after D.G. Uspenskiy. Perm, Part II, pp. 73–77. (in Russian)

Arsanukaev Z.Z. 2016. Ob osobennostyakh ispolzovaniya tekhnologii okonturivaniya posredstvom paketa program GrAnM dlya naklonnykh plastov [On the peculiarities of using contouring technology by the GrAnM software package for inclined seams]. In: Voprosy teorii i praktiki geologicheskoy interpretatsii gravitatsionnykh, magnitnykh i elektricheskikh poley. Proc. of the International Seminar after D.G. Uspenskiy. Voronezh, pp. 21–23. (in Russian)

Arsanukaev Z.Z. 2017. Issledovanie zakonmernostey v povedenii raschyotnogo gravitatsionnogo polya, poluchennogo v rezultate analiticheskogo prodolzheniya, dlya antiklinalnykh i sinklinalnykh skladok [Investigation of regularities in the behavior of the calculated gravitational field obtained in result

of analytical continuation for anticlinal and synclinal folds]. In: Voprosy teorii i praktiki geologicheskoy interpretatsii gravitatsionnykh, magnitnykh i elektricheskikh poley. Proc. of the International Seminar after D.G. Uspenskiy. Moskva, pp. 29–33. (in Russian)

Idelson N.I. 1932. Teoriya potentsiala i eyo prilozheniya k voprosam geofiziki [Potential theory and its applications to geophysics]. GTTI, Leningrad, Moskva, p. 384. (in Russian)

Sternberg, Potential theory (Sammlung Goshen, NN 901 and 974).

Mac-Millan 1930. The theory of the Potential N.-Y., Mc Grawhill

Arsanukaev Z.Z. 2004. Vychislenie prostranstvennykh elementov anomalnykh poley s ispolzovaniem metodov teorii diskretnykh gravitatsionnykh poley [Calculation of spatial elements of anomalous fields using methods of the theory of discrete gravitational fields]. Fizika Zemli. 11:47–69. (in Russian)

Arsanukaev Z.Z., Arsanukaev I. Z. 2015. Programma analiticheskogo prodolzheniya zadannykh na poverkhnosti Zemli znacheniy gravitatsionnogo polya v nizhnee poluprostranstvo s ispolzovaniem diskretnykh skhem i resheniya system lineynykh algebraicheskikh uravneniy bolshikh poryadkov na modelnykh primerakh [The program for the analytical continuation of the values of the gravitational field given on the surface of the Earth into the lower half-space using discrete schemes and solving systems of linear algebraic equations of large orders on model examples]. Certificate of state registration of computer programs (SOFT). #2015661026, October 15, 2015. (in Russian)